HAL open science

On a vector moment problem arising in the analysis of neutral type systems

Kateryna V. Sklyar, Rabah Rabah, Grigory M. Sklyar

► To cite this version:

Kateryna V. Sklyar, Rabah Rabah, Grigory M. Sklyar. On a vector moment problem arising in the analysis of neutral type systems. Spectral and Evolution Problems, 2011, 20 (2), pp.133–137. hal-00580029

HAL Id: hal-00580029
https://hal.science/hal-00580029

Submitted on 12 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Труды международной конференции

Крымская осенняя математическая школа-симпозиум 2010

УДК 517.929
MSC2000: 34K40

К.В. Скляр, Р. Рабах, Г.М. Скляр

Об одной векторной проблеме моментов, возникающей в анализе систем нейтрального типа [1]

Мы рассматриваем разрешимость векторной проблемы моментов, связанной с анализом управляемости некоторых систем с запаздыванием нейтрального типа. Нам удалось точно определить минимальный интервал на котором проблема моментов разрешима.

Ключевые слова: векторная проблема моментов, системы нейтрального типа, точная управляемость, распределение спектра.

Исследуя задачу управляемости для нейтральный систем вида

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \int_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta)\,d\theta + \int_{-1}^{0} A_3(\theta)z(t+\theta)\,d\theta + Bu(t), \qquad (1)$$

где A_{-1} есть постоянная $n \times n$ матрица, $\det A_{-1} \neq 0$, A_2, A_3 – $n \times n$ матрицы с элементами из $L_2(-1,0)$ и B – постоянная $n \times r$ матрица, мы свели ее к к эквивалентной проблеме моментов [4]. Мы рассматриваем операторную модель систем нейтрального типа (1) введенную в работе [2]. В пространстве состояний $M_2(-1,0;\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n \times L_2(-1,0;\mathbb{C}^n)$ система (1) приобретает вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y(t) \\ z_t(\cdot) \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} y(t) \\ z_t(\cdot) \end{pmatrix} + \mathcal{B}u, \qquad (2)$$

где оператор $\mathcal{A}$ задан равенством

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} y(t) \\ z_t(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{0} A_2(\theta)\dot{z}_t(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_{-1}^{0} A_3(\theta)z_t(\theta)\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z_t(\theta)/\mathrm{d}\theta \end{pmatrix}.$$

Область определения оператора $\mathcal{A}$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{(y, z(\cdot)) : z \in H^1(-1,0;\mathbb{C}^n), y = z(0) - A_{-1}z(-1)\right\} \subset M_2.$$

Оператор $\mathcal{A}$ является генератором C_0-группы. Оператор $\mathcal{B}$ определен равенством $\mathcal{B}u = (Bu, 0)$. Соотношение между решениями системы нейтрального типа (1) и системой (2) задано следующей заменой

$$y(t) = z(t) - A_{-1}z(t-1), \quad z_t(\theta) = z(t+\theta).$$

Полное описание спектральных свойств оператора $\mathcal{A}$ дано в [5]. Рассмотрим для простоты случай, когда все собственные значения A_{-1} являются простыми. Обозначим эти собственные значения через μ_m, $m = 1, \ldots, n$. Мы будем использовать обозначение $\tilde{\mathcal{A}}$ вместо $\mathcal{A}$ в случае, когда $A_2(\theta) = A_3(\theta) = 0$. Собственные значения оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ тоже являются простыми и имеют вид

$$\tilde{\lambda}_k^m = \ln|\mu_m| + i(\operatorname{Arg}\mu_m + 2\pi k), m = 1, \ldots, n, k \in \mathbb{Z},$$

а соответствующие им собственные вектора имеют вид

$$\tilde{\varphi}_k^m = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\tilde{\lambda}_k^m \theta}\Phi_m \end{pmatrix} \in M_2,$$

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта министерства науки и высшего образования Польши, грант No. N514 238438.

где $A_{-1}\Phi_m = \mu_m \Phi_m$, $m = 1, \ldots, n$. Кроме того, $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет нулевое собственное значение $\tilde{\lambda}^0 = 0$, которому соответствует n-мерное собственное подпространство порожденное векторами $\tilde{\varphi}_1^0, \ldots, \tilde{\varphi}_n^0$. Семейство собственных векторов $\{\tilde{\varphi}_k^m\} \cup \{\tilde{\varphi}_j^0\}$ образует базис Рисса в M_2. Этот базис обозначим $\widetilde{\varphi}$. В общем случае, если предположить, что $A_2(\theta)$ и $A_3(\theta)$ таковы, что все собственные значения $\mathcal{A}$: λ_k^m, $m = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z}$ остаются простыми, то эти собственные значения удовлетворяют условию

$$\sum_{k,m} \left|\lambda_k^m - \tilde{\lambda}_k^m\right|^2 < \infty, \tag{3}$$

а соответствующие собственные вектора $\{\varphi_k^m\}$ условию

$$\sum_{k,m} \|\varphi_k^m - \tilde{\varphi}_k^m\|^2 < \infty.$$

Собственные вектора $\{\varphi_k^m\}$ вместе с $\{\varphi_j^0\}$ образуют базис Рисса в M_2, который является квадратично близким к спектральному базису $\{\tilde{\varphi}\}$ оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ [5, 6].

Пусть $\{\tilde{\psi}\}$ и $\{\psi\}$ являются биортогональными базисами для $\{\tilde{\varphi}\}$ и $\{\varphi\}$ соответственно. Нетрудно проверить, что $\{\tilde{\psi}\}$ и $\{\psi\}$ есть спектральные базисы сопряженных операторов $\tilde{\mathcal{A}}^*$ и $\mathcal{A}^*$ соответственно и

$$\tilde{\mathcal{A}}^* \tilde{\psi}_k^m = \bar{\tilde{\lambda}}_k^m \tilde{\psi}_k^m, \qquad \mathcal{A}^* \psi_k^m = \bar{\lambda}_k^m \psi_k^m,$$

где $(\overline{\cdot})$ обозначает комплексное сопряжение.

Кроме того, базисы являются также квадратично близкими [3]:

$$\sum_{k,m} \left\|\psi_k^m - \tilde{\psi}_k^m\right\|^2 < \infty.$$

Далее заметим, что, как это показано в [6], вектора $\tilde{\psi}_k^m$, $k \neq 0$ имеют вид

$$\tilde{\psi}_k^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \Psi_m \\ * \end{pmatrix} \in M_2 \qquad \psi_k^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \Psi_{mk} \\ * \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где Ψ_m, $m = 1, \ldots, n$ собственные вектора матрицы A_{-1},

$$A_{-1}\psi_m = \bar{\mu}_m \psi_m,$$

и

$$\sum_{k,m} \|\Psi_{mk} - \Psi_m\|^2 < \infty, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Для каждого $x \in M_2$ мы имеем разложение

$$x = \sum_{\varphi \in \{\varphi\}} \langle x, \psi \rangle \varphi.$$

Известно, что состояние $x = \begin{pmatrix} y \\ z(\cdot) \end{pmatrix} \in M_2$ достижимо за время T с помощью управления из $u(\cdot) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r)$ тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z(\cdot) \end{pmatrix} = \int_0^T \mathrm{e}^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} u(t) \mathrm{d}t, \qquad u(\cdot) \in L_2(0, T; \mathbb{C}^r). \tag{6}$$

Это условие управляемости может быть записано, используя базис $\{\varphi\}$ в виде

$$\sum_{\varphi \in \{\varphi\}} \langle x, \psi \rangle \varphi = \sum_{\varphi \in \{\varphi\}} \int_0^T \langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} u(t), \psi \rangle \mathrm{d}t \varphi.$$

То есть условие управляемости (6) эквивалентно следующей системе равенств:

$$\langle x, \psi \rangle = \int_0^T \langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} u(t), \psi \rangle \mathrm{d}t, \quad \psi \in \{\psi\}. \tag{7}$$

Пусть $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ столбцы матрицы B и $b_i = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_i \\ 0 \end{pmatrix} \in M_2$, $i = 1, \ldots, r$. Запишем правую часть равенства (7) в виде

$$\int_0^T \langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} u(t), \psi \rangle \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^r \int_0^T \langle \mathrm{e}^{\mathcal{A}t} b_i, \psi \rangle u_i(t) \mathrm{d}t.$$

Поскольку $\{\psi\}$ спектральный базис $\mathcal{A}^*$, то условие управляемости (6) эквивалентно системе равенств

$$s_k^m = \left(k + \frac{1}{2}\right) \langle X, \Psi_k^m \rangle = \int_0^T e^{\lambda_k^m t} \left(b_{k,m}^1 u_1(t) + \ldots + b_{k,m}^r u_r(t)\right) dt, \tag{8}$$

$m = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{Z}$, где $b_{k,m}^j = \left(k + \frac{1}{2}\right) \langle b_j, \psi_k^m \rangle$. Равенства (8) представляют собой векторную проблему моментов относительно неизвестных $u_j(\cdot) \in L_2[0, T]$, $j = 1, \ldots, r$. Используя (4), мы заметим, что

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) \langle b_j, \tilde{\psi}_k^m \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{b}_j \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Psi_m \\ * \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{b}_j, \Psi_m \rangle = b_m^j,$$

то есть эти значения не зависят от k. Тогда из (5) следует, что коэффициенты $b_{k,m}^j$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k,m} \left| b_{k,m}^j - b_m^j \right|^2 = \sum_{k,m} |\langle \mathbf{b}_j, \psi_{mk} - \psi_m \rangle|^2 < \infty \quad j = 1, \ldots, r. \tag{9}$$

В скалярном случае, когда $r = 1$, при условии

$$b_m^1 = \langle \mathbf{b}_1, \psi_m \rangle \neq 0, \quad m = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

которое является условием управляемости для пары (A_{-1}, B) и условии

$$\langle b_1, \psi_k^m \rangle \neq 0, \quad m = 1, \ldots, n; k \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

означающем аппроксимативную управляемость системы (2), проблема (8) представляет собой не классическую тригонометрическую проблему моментов относительно скалярной функции $u(\cdot) \in L_2[0, T]$. Разрешимость этой проблемы полностью изучена в [1].

В векторном случае проблем значительно труднее. Как показано в работе [4], минимальный интервал разрешимости (8) связан с первым индексом управляемости $n_1(A_{-1}, B)$ системы $\dot{x} = A_{-1} x + B u$ (см. [7]).

Этот результат подтолкнул нас рассмотреть обратную задачу: изучать проблему моментов (8), естественно, при некоторых специальных предположениях, используя известные результаты об управляемости для систем нейтрального типа.

Мы показываем, что условия (3), (9), вместе с некоторыми условиями аналогичными (10), (11) являются не только необходимыми, но также "близки" к достаточным для того, чтобы проблема моментов (8) была эквивалентна проблеме управляемости для некоторой управляемой системы нейтрального типа (1).

Теорема 1. *I. Пусть проблема моментов* (8) *соответствует проблеме управляемости для некоторой точно управляемой системы нейтрального типа* (1). *Тогда выполняются условия*

i) $\sum\limits_{k,m}\left|\lambda_k^m-\tilde{\lambda}_k^m\right|^2<\infty$, *где* $\tilde{\lambda}_k^m=ln|\mu_m|+i(\operatorname{Arg}\mu_m+2\pi k)$, $m=1,\ldots,n, k\in\mathbb{Z}$, $\mu_1,\ldots,\mu_r$ *некоторые ненулевые различные комплексные числа;*

ii) $\sum\limits_{j,k,m}\left|b_{k,m}^j-b_m^j\right|^2<\infty$, *где* b_m^j $(m=1,\ldots,n, j=1,\ldots,r)$ *есть некоторые действительные числа такие, что* $\sum\limits_j\left|b_m^j\right|>0$, $m=1,\ldots,n;$

iii) $\sum\limits_j\left|b_{k,m}^j\right|>0$, $m=1,\ldots,n$, $k\in\mathbb{Z}$.

II. Обратно, пусть числа $\{\tilde{\lambda}_k^m\}$ *удовлетворяют условию i). Тогда существует* $\varepsilon>0$ *такое, что для любой последовательности* $\{b_{k,m}^j\}$*, удовлетворяющей условию ii) в следующем усиленном виде*

$$\sum_{j,k,m}\left|b_{k,m}^j-b_m^j\right|<\varepsilon,$$

а также условию iii), проблема моментов (8) *будет соответствовать проблеме управляемости для некоторой системы нейтрального типа* (1)*. При этом матрица* A_{-1} *размера* $n\times n$ *и матрица* B *размера* $n\times r$ *в системе нейтрального типа могут быть выбраны как:*

$$A_{-1}=\operatorname{diag}\{\mu_1,\ldots,\mu_n\},\qquad B=\{b_m^j\}_{m=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r}.$$

Отметим, что теорема 1 является прямым обобщением теоремы о распределении спектра системы нейтрального типа с одномерным управлением [6]. Обозначим через $\mathcal{R}_T$ множество моментных последовательностей $\{s_k^m\}$ для которых проблема (8) разрешима, т.е. существуют функции $u_j(t)$, $j=1,\ldots,r$ из $L_2[0,T]$ такие, что равенства (8) выполняются. Из общей теории проблемы моментов следует, что $\mathcal{R}_T$ является подмножеством пространства l_2. С помощью сведения проблемы моментов к задаче управляемости мы можем определить точное значение T_0 такое, что $\mathcal{R}_T=l_2$ при $T>T_0$. Сопоставляя теорему 1 и результат работы [4] (раздел 7), мы получаем

Теорема 2. *Пусть условия второй части теоремы 1 i) – iii) выполнены. Мы имеем:*

(1) *Если* $T>n_1(A_{-1},B)$ *тогда* $\mathcal{R}_T=l_2$.
(2) *Если* $T=n_1(A_{-1},B)$ *тогда* $\mathcal{R}_T$ *есть подпространство пространства* l_2 *конечномерной коразмерности в* l_2 *(возможен случай, когда* $\mathcal{R}_T=l_2$*).*
(3) *Если* $T<n_1(A_{-1},B)$ *тогда* $\mathcal{R}_T$ *является подпространством* l_2 *бесконечномерной коразмерности.*

Пример. Рассмотрим две векторные проблемы моментов:

$$\begin{aligned}
s_k^1&=\int_0^T e^{(i(\pi+2\pi k)+\varepsilon_k^1)t}(11u_1(t)+u_2(t))dt,\\
s_k^2&=\int_0^T e^{(i2\pi k+\varepsilon_k^2)t}(u_1(t)+u_2(t))dt,\\
s_k^3&=\int_0^T e^{(\log 2+i2\pi k+\varepsilon_k^3)t}(u_1(t)-u_2(t))dt,\\
s_k^4&=\int_0^T e^{(\log 3+i2\pi k+\varepsilon_k^4)t}(u_1(t)-u_2(t))dt,
\end{aligned}\tag{12}$$

и

$$
\begin{aligned}
s_k^1 &= \int_0^T e^{(i(\pi+2\pi k)+\varepsilon_k^1)t}(6u_1(t)-u_2(t))dt,\\
s_k^2 &= \int_0^T e^{(i2\pi k+\varepsilon_k^2)t}(4u_1(t)-u_2(t))dt,\\
s_k^3 &= \int_0^T e^{(\log 2+i2\pi k+\varepsilon_k^3)t}(3u_1(t)-u_2(t))dt,\\
s_k^4 &= \int_0^T e^{(\log 3+i2\pi k+\varepsilon_k^4)t}(2u_1(t)-u_2(t))dt,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$k\in\mathbb{Z}$, $\sum_k(\varepsilon_k^j)^2<\infty$, $j=1,\ldots,4$. Обе проблемы моментов могут быть сведены к задаче управляемости для систем вида (1), где

$$
A_{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\6&-5&-5&5\end{pmatrix},
$$

$\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4\}=\{-1,1,2,3\}$, соответствующие собственные вектора матрицы A_{-1}^* есть

$$
\Psi_1=\begin{pmatrix}-6\\11\\-6\\1\end{pmatrix},\Psi_2=\begin{pmatrix}6\\1\\-4\\1\end{pmatrix},\Psi_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\-3\\1\end{pmatrix},\Psi_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\\1\end{pmatrix},
$$

и в первом случае $B_1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$, во втором случае $B_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ для определенного выбора $A_2(\theta)$, $A_3(\theta)$. Поскольку $n_1(A_{-1},B_1)=2$ и $n_1(A_{-1},B_2)=3$, то проблема моментов (12) разрешима для всех $\{s_k^j\}\in l_2$, если $T>2$, в то время как проблема моментов (13) разрешима при $T>3$.

Список литературы

[1] Avdonin S. A., Ivanov S. A. *Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems* // Cambridge University Press, Cambridge – 1995.

[2] Burns, John A., Herdman, Terry L., Stech, Harlan W. *Linear functional-differential equations as semigroups on product spaces*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 14, Issue 1 (1983), 98–116.

[3] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* // Наука, Москва – 1965.

[4] Rabah R., Sklyar G. M. *The Analysis of Exact Controllability of Neutral-Type Systems by the Moment Problem Approach*, SIAM J. Control Optim. Vol. 46, Issue 6 (2007), 2148–2181.

[5] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. *Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space*, J. Differential Equations 214 (2005), No. 2, 391–428.

[6] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. *On strong regular stabilizability for linear neutral type systems*, J. Differential Equations 45 (2008), No. 3, 569–593.

[7] Wonham W. M. *Linear multivariable control: A geometric Approach* // Springer, New York – 1985.

E-mail: `sklar@univ.szczecin.pl, rabah@emn.fr`

К.В. Скляр, 70451, Poland, Szczecin, Institute of Mathematics, University of Szczecin, Wielkopolska str., 15

Р. Рабах, France, F-44307, France, Nantes Cedex 3, IRCCyN, Ecole des Mines de Nantes, 4 rue Alfred Kastler

Г.М. Скляр, 70451, Poland, Szczecin, Institute of Mathematics, University of Szczecin, Wielkopolska str., 15

Abstract

We consider solvability of a vector moment problem by means of its correspondence to controllability problem for a certain delayed system of neutral type. In this way we succeded to determine exsctly the minimal interval on which the moment problem is solvable.

Аннотация

Мы рассматриваем разрешимость векторной проблемы моментов, связанной с анализом управляемости некоторых систем с запаздыванием нейтрального типа. Нам удалось точно определить минимальный интервал на котором проблема моментов разрешима.

Анотація

Ми розглядаємо задачу розв'язання проблеми моментів, що пов'язана з аналізом керованості деяких систем з запізненням нейтрального типу. Нам вдалося точно визначити мінімальний інтервал на якому проблему моментів можна вирішити.